ریاضی (حصہ - II)

مشقی سوالیہ پرچہ 3 کا مکمل حل

سوال 1. (A) (i) (C)
(ii) (D)
(iii) (B)
(iv) (B)

سوال 1. (A) طلبہ کی رہنمائی کے لیے اس سوال میں دیے گئے ہر کثیر متبادل جوابی سوال کے جواب کی ذیل میں وضاحت دی گئی ہے۔ البتہ امتحان میں طلبہ سے وضاحت کرنے کی توقع نہیں کی جاتی ہے۔

وضاحت :

(i) (C) [دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت = نظیری ضلعوں کے مربعوں کی نسبت]

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{(S_1)^2}{(S_2)^2}$$

(ii) (D) [ضلع × 4 = مربع کا احاطہ ; وتر × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = مربع کا ضلع]

(iii) (B) [$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ دو نقاط کا درمیانی فاصلہ]

(iv) (B) محیط = $2\pi r$, رقبہ = πr^2]

$$\left[\therefore \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{7} \qquad \therefore r = 7 \qquad \therefore \text{قطر} = 14\right.$$

سوال 1. (B) (i) حل : قائم مدوّر استوانہ کا حجم = $\pi r^2 h$ = 600 مکعب سم ... (دیا ہوا ہے)

استوانہ اور مخروط کے قاعدوں کے نصف قطر اور عمودی بلندیاں مساوی ہیں۔

استوانہ کا حجم × $\frac{1}{3}$ = قائم مخروط کا حجم

$= \frac{1}{3} \times 600 = 200$ مکعب سم

جواب : قائم مدوّر مخروط کا حجم **200 مکعب سم** ہے۔

(ii) حل : X-محور کی ڈھلان 0 ہوتی ہے۔

متوازی خطوط کی ڈھلان مساوی ہوتی ہے۔

جواب : X-محور کے متوازی کسی بھی خط کی ڈھلان صفر ہوگی۔

(iii) حل : $\triangle QPR$ میں،

$$\left.\begin{array}{l} \angle QPR = 90^\circ \\ \angle PQR = 60^\circ \\ \angle PRQ = 30^\circ \end{array}\right\} \quad \ldots \text{(دیا ہوا ہے)}$$

$\therefore$ $\triangle QPR$ ایک $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ کا مثلث ہے۔

$\therefore$ $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ کے مثلث کے مسئلے کی بنا پر،

$PQ = \frac{1}{2} QR$ … (30° پیمائش کے زاویے کا مقابل کا ضلع وتر کا نصف ہوتا ہے)

$\therefore\ 7 = \frac{1}{2} QR$

$\therefore\ QR = 7 \times 2$

$\therefore\ QR = 14$ سم

جواب : QR کی لمبائی **14** سم ہوگی۔

(iv) حل :

$\frac{AX}{XB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{AY}{YC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

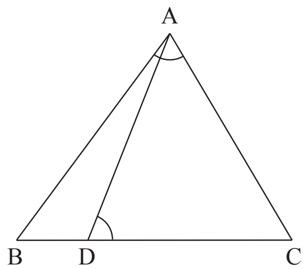
$\therefore\ \frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$

$\therefore$ خط XY || ضلع BC … (متناسبت کے بنیادی مسئلہ کے عکس کی بنا پر)

جواب : متناسبت کے بنیادی مسئلہ کی بنا پر B ضلع || XY خط

سوال 2. (A) (i) سرگرمی :

$\triangle ADC$ اور $\triangle BAC$ میں،



$\angle BAC \cong \angle ADC$ … (دیا ہوا ہے)

$\angle ACB \cong \boxed{\angle \mathbf{DCA}}$ … (مشترکہ زاویہ)

$\therefore\ \triangle BAC \sim \triangle ADC$ … (متشابہت کی **زازا** آزمائش)

$\therefore\ \frac{CA}{\boxed{\mathbf{CD}}} = \frac{CB}{\boxed{\mathbf{CA}}}$ … (متشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعے)

$\therefore\ CA \times CA = CD \times CB$

$\therefore\ CA^2 = CB \times CD$

(ii) سرگرمی :

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

$1 + \boxed{\left(\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{9}}\right)}^2 = \text{cosec}^2\theta$ … (قیمتیں رکھنے پر)

$\therefore\ 1 + \frac{1600}{81} = \text{cosec}^2\theta$

$\therefore\ \text{cosec}^2\theta = \boxed{\frac{\mathbf{1681}}{\mathbf{81}}}$

$\therefore\ \operatorname{cosec}\theta = \boxed{\dfrac{41}{9}}$

$\therefore\ \sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

$\therefore\ \sin\theta = \boxed{\dfrac{9}{41}}$

(iii) سرگرمی :

مدوّر استوانہ نما بالٹی کے لیے :

قطر $= 28$ سم

نصف قطر $(r) = 14$ سم

اونچائی $(h) = 20$ سم

ریت کے مخروط کے لیے :

اونچائی $(h_1) = 14$ سم

نصف قطر r_1 (فرض کیا)

قاعدے کا رقبہ $= \pi r_1^2$

یہاں، مدوّر استوانہ نما بالٹی کا حجم $=$ ریت کے مخروط کا حجم

$\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2\ h_1$

$\therefore\ \dfrac{22}{7} \times 14 \times 14 \times \boxed{20} = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 \times \boxed{14}$

$\therefore\ \pi r_1^2 = \dfrac{22 \times 14 \times 14 \times \boxed{20} \times 3}{7 \times 14}$

$\therefore\ \pi r_1^2 =$ مخروط کے قاعدے کا رقبہ $= \boxed{2640}$ مربع سم

سوال 2. (B) (i) حل :

فرض کیا پہلے دائرے کا نصف قطر r_1 اور دوسرے دائرے کا نصف r_2 ہیں۔

دونوں دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر مَس کرتے ہیں۔

$\therefore\ |r_1 - r_2| = 10$

$\therefore\ r_1 - r_2 = 10 \quad \ldots(1)$ یا $r_1 - r_2 = -10 \quad \ldots(2)$

$\therefore\ 15 - r_2 = 10 \quad \ldots$[(1) کی بنا پر]

$\therefore\ 15 - 10 = r_2$

$\therefore\ r_2 = 5$ سم

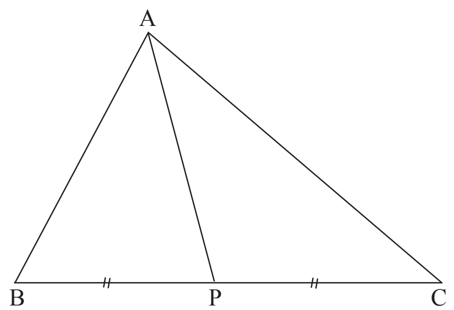
$15 - r_2 = -10$

$\therefore\ 15 + 10 = r_2$

$\therefore\ r_2 = 25$ سم

جواب : دوسرے دائرے کا نصف قطر **5** سم یا **25** سم ہے۔

(ii)



$\triangle ABC$ میں،

قطعہ AP اس کا ایک وسطانیہ ہے۔

$BC = 18$ ... (دیا ہوا ہے)

$BP = PC = \frac{1}{2} BC$ ... (P، قطعہ AB کا درمیانی نقطہ ہے)

$\therefore BP = \frac{1}{2} \times 18$

$\therefore BP = PC = 9$

$\triangle ABC$ میں، قطعہ AP وسطانیہ ہے۔ ... (دیا گیا ہے)

$\therefore$ اپولونیس کے مسئلہ کی بنا پر،

$AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2BP^2$

$\therefore 260 = 2AP^2 + 2(9)^2$

$\therefore 260 = 2AP^2 + 162$

$\therefore 2AP^2 = 260 - 162$

$\therefore 2AP^2 = 98$

$\therefore AP^2 = \frac{98}{2}$

$\therefore AP^2 = 49$

$\therefore AP = 7$ ... (طرفین کا جذر المربع لینے پر)

جواب : قطعہ AP کی لمبائی **7** ہے۔

(iii) **حل :** فرض کیا $A(-7, 6)$، $B(2, -2)$ اور $C(8, 5)$

فرض کیا $A(-7, 6) \equiv (x_1, y_1)$ ، $B(2, -2) \equiv (x_2, y_2)$ ، $C(8, 5) \equiv (x_3, y_3)$

$\therefore x_1 = -7, y_1 = 6, x_2 = 2, y_2 = -2, x_3 = 8$ اور $y_3 = 5$

اور فرض کیا $G(x, y)$ ہندسی مرکز ہے۔

ہندسی مرکز کے ضابطے کی بنا پر،

$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$\therefore x = \frac{-7 + 2 + 8}{3}$

$\therefore x = \frac{3}{3}$

$\therefore x = 1$

$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

$\therefore y = \frac{6 + (-2) + 5}{3}$

$\therefore y = \frac{9}{3}$

$\therefore y = 3$

جواب : ہندسی مرکز کے محددین **(1, 3)** ہیں۔

(iv) **ثبوت :**

$$\text{بائیں طرف} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} \qquad \ldots [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \sec\theta \qquad \ldots \left[\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right]$$

= دائیں طرف

$$\therefore \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$$

(v) **حل :** کرّے کا قطر = 6 سم

کرّے کا نصف قطر (r) = 3 سم

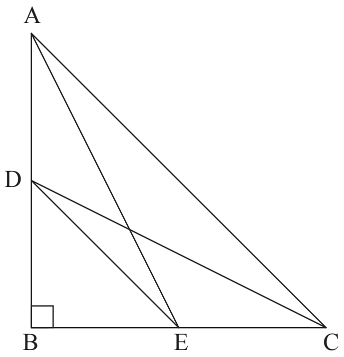
کرّے کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 3 \times 3 \times 3$$

$= 113.04$ مکعب سم

جواب : کرّے کا حجم **113.04 مکعب سم** ہے۔

سوال 3. (A) (i) سرگرمی :



قائمۃ الزاویہ $\triangle ABE$ میں،

فیثاغورث کے مسئلہ کی بنا پر،

$$AE^2 = AB^2 + \boxed{\mathbf{BE^2}} \qquad \ldots (1)$$

قائمۃ الزاویہ $\triangle DBC$ میں، فیثاغورث کے مسئلہ کی بنا پر،

$$CD^2 = \boxed{\mathbf{DB^2}} + BC^2 \qquad \ldots (2)$$

قائمۃ الزاویہ $\triangle ABC$ میں، فیثاغورث کے مسئلہ کی بنا پر،

$$AC^2 = AB^2 + \boxed{\mathbf{BC^2}} \qquad \ldots (3)$$

قائمۃ الزاویہ $\triangle DBE$ میں، فیثاغورث کے مسئلہ کی بنا پر،

$$DE^2 = BD^2 + \boxed{\mathbf{BE^2}} \qquad \ldots (4)$$

(1) اور (2) کی جمع کرنے پر،

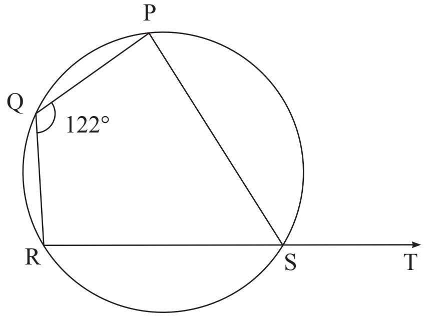
$$AE^2 + CD^2 = AB^2 + BE^2 + BD^2 + BC^2$$

$$\therefore AE^2 + CD^2 = (AB^2 + BC^2) + (BD^2 + BE^2) \qquad \ldots (5)$$

(5) میں (3) اور (4) کی قیمتیں رکھنے پر،

$$AE^2 + CD^2 = \boxed{\mathbf{AC^2}} + \boxed{\mathbf{DE^2}}$$

(ii)



سرگرمی :

PQRS □ مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع ہے۔

مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کے مقابل کے زاویے $\boxed{\text{متمم}}$ ہوتے ہیں۔

$\angle PQR = 122°$ ... (دیا ہوا ہے)

اور $\angle PQR + \angle PSR = \boxed{\mathbf{180°}}$

$\therefore \quad 122° + \angle PSR = \boxed{\mathbf{180°}}$

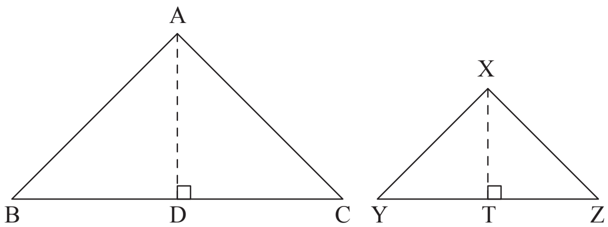
$\therefore \quad \angle PSR = \boxed{\mathbf{58°}}$

$\therefore$ PQRS □ کا خارجہ زاویہ $\angle$ PST ہے۔

$\angle PST = \angle \boxed{\mathbf{PQR}}$ ... (مستقیم المحیط ذو اربعۃ الاضلاع کا ضمنی مسئلہ)

$\therefore \quad \angle PST = \boxed{\mathbf{122°}}$

سوال 3. (B) (i)



دیا ہوا ہے : $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$،

ثابت کرنا ہے : $$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle XYZ)} = \frac{AB^2}{XY^2} = \frac{BC^2}{YZ^2} = \frac{AC^2}{XZ^2}$$

عمل : BC ضلع ⊥ AD قطعہ اور YZ ضلع ⊥ XT قطعہ اس طرح بنائیے کہ

B – D – C اور Y – T – Z

ثبوت : دو مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری قاعدوں اور ارتفاعوں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔

$$\therefore \quad \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle XYZ)} = \frac{BC \times AD}{YZ \times XT}$$

$$\therefore \quad \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle XYZ)} = \frac{BC}{YZ} \times \frac{AD}{XT} \qquad \text{... (1)}$$

$\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ ... (دیا ہوا ہے)

$\therefore \quad \angle B \cong \angle Y$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری زاویے) ... (2)

$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AC}{XZ}$ اور ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعے) ... (3)

$\triangle XYT$ اور $\triangle ABD$ میں،

$\angle ABD \cong \angle XYT$ ... [(2) کی بنا پر]

$\angle ADB \cong \angle XTY$ ... (ہر ایک کی پیمائش $90°$)

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle XYT$ ... (متشابہت کی زازا آزمائش)

$\therefore \frac{AB}{XY} = \frac{AD}{XT}$ ... (متشابہ مثلثوں کے نظیری ضلعے) ... (4)

$\therefore$ (3) اور (4) کی بنا پر،

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{AD}{XT}$$

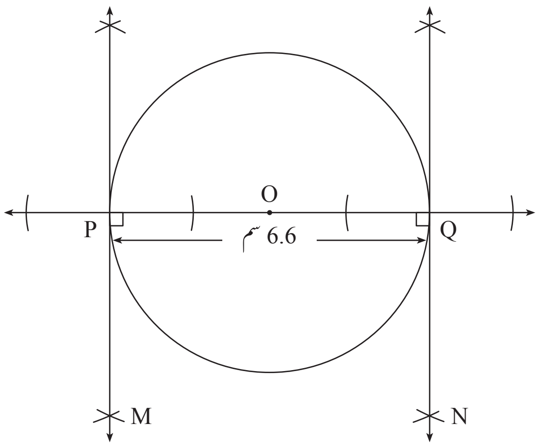
$$\therefore \frac{BC}{YZ} = \frac{AD}{XT} \quad \text{... (5)}$$

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle XYZ)} = \frac{BC}{YZ} \times \frac{BC}{YZ}$$ ... [(1) اور (5) کی بنا پر]

$$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle XYZ)} = \frac{BC^2}{YZ^2} \quad \text{... (6)}$$

$$\therefore \frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle XYZ)} = \frac{AB^2}{XY^2} = \frac{BC^2}{YZ^2} = \frac{AC^2}{XZ^2}$$ ... [(1) اور (6) کی بنا پر]

(ii)



نقاط P اور Q پر کھینچے ہوئے مماس ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

(iii) حل : فرض کیا $A(-1, 7)$ اور $B(4, -3)$

فرض کیا نقطہ P کے محددین (x, y) ہیں۔

فرض کیا نقطہ A کے محددین (x_1, y_1) اور نقطہ B کے محددین (x_2, y_2) ہیں۔

تب $x_1 = -1$، $y_1 = 7$، $x_2 = 4$ اور $y_2 = -3$

نقطہ P قطعہ AB کو $2 : 3$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

$\therefore m : n = 2 : 3$

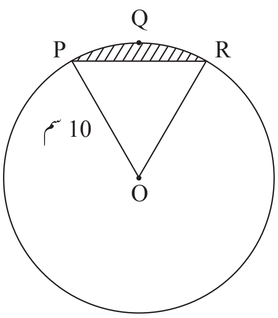
حصے کے ضابطے کی بنا پر،

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$
$$\therefore x = \frac{2(4) + 3(-1)}{2 + 3}$$
$$\therefore x = \frac{8 - 3}{5}$$
$$\therefore x = \frac{5}{5}$$
$$\therefore x = 1$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$
$$\therefore y = \frac{2(-3) + 3(7)}{2 + 3}$$
$$\therefore y = \frac{-6 + 21}{5}$$
$$\therefore y = \frac{15}{5}$$
$$\therefore y = 3$$

جواب : نقطہ $A(-1, 7)$ اور $B(4, -3)$ کو ملانے والے قطعہ AB کو $2 : 3$ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ **P** کے محددین **P (1, 3)** ہیں۔

(iv) **حل :**



دائرے کا نصف قطر $(r) = OP = 10$ سم۔

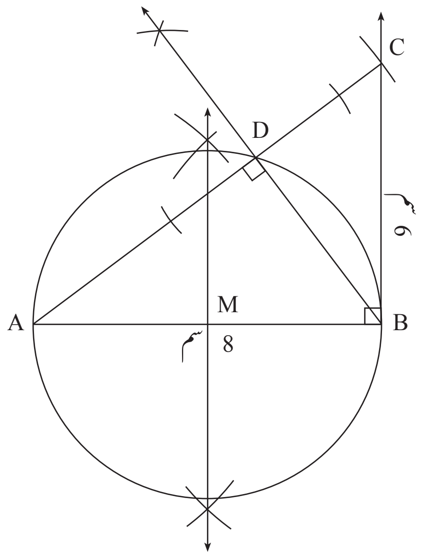
m (قوس PQR) $= \theta = 60°$

نشان زدہ حصہ قطعہ PQR کو ظاہر کرتا ہے۔

$$A(\text{قطعہ دائرہ PQR}) = r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$$
$$= 10^2\left[\frac{3.14 \times 60}{360} - \frac{\sin 60}{2}\right]$$
$$= 100\left[\frac{3.14}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2 \times 2}\right] \qquad \ldots\left[\because \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$= 100 \times \left[\frac{3.14}{6} - \frac{1.73}{4}\right] \qquad \ldots(\because \sqrt{3} = 1.73)$$
$$= 100\left[\frac{3.14 \times 2 - 1.73 \times 3}{12}\right]$$
$$= 100\left[\frac{6.28 - 5.19}{12}\right]$$
$$= 100 \times \frac{1.09}{12}$$
$$= \frac{109}{12}$$
≈ 9.08 مربع سم

جواب : نشان زدہ حصے کا رقبہ **9.08 مربع سم** ہے۔

سوال 4.　　(i)



ثبوت : نقاط A، D، B، سے دائرہ گزرتا ہے $\angle ADB = 90°$

قوس ADB نصف دائرہ ہے۔

اس لیے AB دائرے کا قطر ہے۔

نقطہ M قطر کا وسطی نقطہ ہے۔ اس لیے نقطہ M دائرے کا مرکز ہے۔

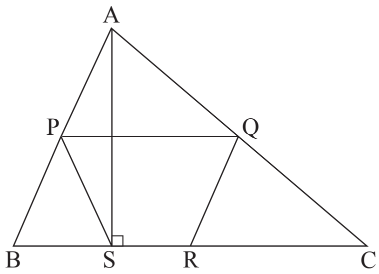
$\therefore$ MB دائرے کا نصف قطر ہے۔

CB ، نصف قطر MB کے بیرونی سِرے B پر عمود ہے۔　... (دیا ہوا ہے)

$\angle$ CBA قائمۃ الزاویہ ہے۔

$\therefore$ دائرے کے مماس کے مسئلہ کے عکس کی بنا پر خط CB ، نقاط A، B اور D سے گزرنے والے دائرے کا مماس ہے۔

(ii) **ثبوت :**



$\triangle$ ABC میں، ضلع AB اور ضلع AC کے

وسطی نقاط بالترتیب P اور Q ہیں۔

(وسطی نقاط کا مسئلہ) ... قطعہ PQ $\parallel$ ضلع BC $\therefore$

$\therefore$ قطعہ PQ $\parallel$ قطعہ BR ... (B – R – C)　... (1)

$\therefore$ اسی طرح قطعہ QR $\parallel$ قطعہ BP　... (2)

(1) اور (2) کی بنا پر، $\square$ PQRB متوازی الاضلاع ہے،

$\therefore \ \angle B = \angle PQR$ ... (متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں)　... (3)

$\triangle$ ASB میں،

$\angle ASB = 90°$　... (دیا ہوا ہے)

قطعہ SP، وتر AB پر کھینچا ہوا وسطانیہ ہے۔

$\therefore \ SP = \frac{1}{2} AB$ ... (قائمۃ الزاویہ میں وتر پر کھینچا ہوا وسطانیہ، وتر کا نصف ہوتا ہے)　... (4)

علاوہ ازیں $BP = \frac{1}{2} AB$ ... (P، ضلع AB کا وسطی نقطہ ہے)　... (5)

$\triangle$ PBS میں،

$SP = PB$ ... [(4) اور (5) کی بنا پر]

$\angle B = \angle PSB$ ... (متساوی الساقین مثلث کا مسئلہ) ... (6)

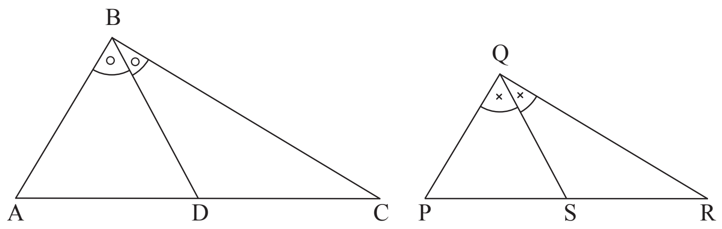
$\therefore \angle PSB = \angle PQR$ ... [(3) اور (6) کی بنا پر] ... (7)

$\angle PSB + \angle PSR = 180°$ ... (خطی جوڑی کے زاویے)

$\therefore \angle PQR + \angle PSR = 180°$ ... [(7) کی بنا پر]

$\therefore$ $\square$ PQRS مستقیم المحیط ذواربعۃ الاضلاع ہے، کیونکہ اس کے مقابل کے زاویوں کی پیمائش کا مجموعہ $180°$ ہے یعنی یہ زاویے متمم ہیں۔

(iii)



ثبوت :

$$\frac{l(AD)}{l(PS)} = \frac{l(DC)}{l(SR)}$$ ... (دیا ہوا ہے)

$$\frac{l(AD)}{l(DC)} = \frac{l(PS)}{l(SR)}$$ ... (عمل تبدیل کی بنا پر) ...(1)

$\triangle$ ABC میں، زاویے کے ناصف کے مسئلے کی بنا پر،

$$\frac{l(AB)}{l(BC)} = \frac{l(AD)}{l(DC)}$$ ... (2)

$\triangle$ PQR میں، زاویے کے ناصف کے مسئلے کی بنا پر،

$$\therefore \frac{l(PQ)}{l(QR)} = \frac{l(PS)}{l(SR)}$$ ... (3)

$$\frac{l(AB)}{l(BC)} = \frac{l(PQ)}{l(QR)}$$ ... [(1)، (2) اور (3) کی بنا پر]

$$\frac{l(AB)}{l(PQ)} = \frac{l(BC)}{l(QR)}$$ ... (عمل تبدیل کی بنا پر) ... (4)

$\triangle$ ABC اور $\triangle$ PQR میں،

$\angle ABC \cong \angle PQR$ ... (دیا ہوا ہے)

$$\frac{l(AB)}{l(PQ)} = \frac{l(BC)}{l(QR)}$$ ... [(4) کی بنا پر]

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$ ... (متشابہت کی ضلع زاویہ ضلع آزمائش)

سوال 5. (i) حل :

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$$ ... (دیا ہوا ہے)

طرفین کا مربع کرنے پر،

$$\left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)^2 = (2)^2$$

$$\tan^2\theta + 2 \times \cancel{\tan\theta} \times \frac{1}{\cancel{\tan\theta}} + \frac{1}{\tan^2\theta} = 4$$

$$\ldots[\because (a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2]$$

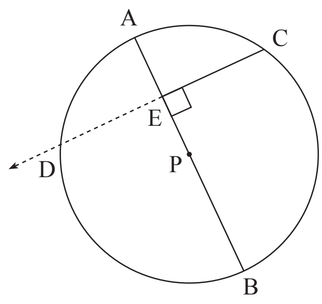
$$\therefore \tan^2\theta + 2 + \frac{1}{\tan^2\theta} = 4$$

$$\therefore \tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 4 - 2$$

$$\therefore \tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$$

جواب : $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta}$ کی قیمت **2** ہے۔

(a) **(iii)**



(b) CD وتر $PE \perp$ قطعہ

دائرے کے مرکز سے وتر پر کھینچا ہوا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

$\therefore$ CE = ED ... (1)

(c) وتر AB اور وتر CD دائرے کے اندرون میں نقطہ E پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

$\therefore$ دائرے کے وتروں کے داخلی تقاطع کے مسئلہ کی بنا پر،

$\therefore$ CE $\times$ ED = AE $\times$ EB ... (2)

(d) اب, CE $\times$ ED = AE $\times$ EB ... [(2) کی بنا پر]

$\therefore$ CE $\times$ CE = AE $\times$ EB ... [(1) کی بنا پر]

$\therefore$ CE^2 = AE $\times$ EB

$\therefore$ اس لیے قطعہ CE، قطعات AE اور EB کا ہندسی وسط ہے۔